若干數學問題中的數學文化

有關黃金比例的研究歷史綿延了 2600 年之久，歐幾里得在＜幾何原本＞卷六中對「中末比」的定義，這是自古以來即為人所熟之的幾何比例。十九世紀時人們為它起了「黃金比例」、「黃金數字」、「黃金分割」等名字，這個比例是一個無理數，和 π 一樣也被給予一個符號 Φ(phi)。Φ 的歷史多采多姿，常出現在一些不相干的現象中，往往「令人驚奇」，五角星形中的等腰三角形、鸚鵡螺美麗的螺線結構、達利畫作＜最後的晚餐盛餐＞、兔子的繁殖、植物葉子生長位置的排列、星系結構，以及從數學到藝術等等，竟然都和 Φ 有關，黃金比例 Φ＝1.6180339887……。

將直線 AB 分割成兩段 AC、CB，使長段與短段之比等於全長與長段之比
此比例稱為「黃金比例」，以 Φ 表示。見圖一

圖一中末比

證明如下：

AC/CB = AB/AC

設 AC 為 x　　CB 為 1

則 $\frac{x}{1}=\frac{x+1}{x}$，化簡

$$x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$$

另外，連分數的式子及無窮無盡的平方根，是否會收斂到一個固定的值呢？

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

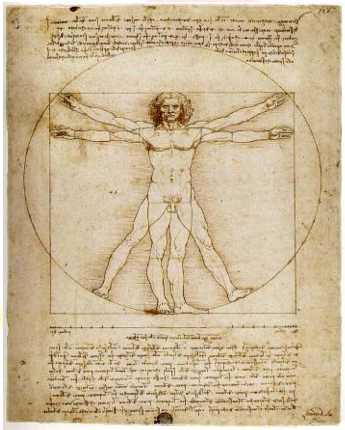
與

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

經推導，所得的式子與正是定義黃金比例的方程式，因此兩者皆收斂到定值 Φ。給黃金比例取了 Φ 這個名字，是為了表達對古希臘最偉大的雕刻家費底亞斯(Phidias,490~430B.C.)致敬。費底亞斯最令人津津樂道的作品是矗立在雅典巴特農神殿的雅典娜女神像，以及奧林匹亞神廟中的宙斯像。因為有不少藝術史家都承認，費底亞斯經常在他的雕塑作品中應用到黃金比例，1884 年出版的『黃金分割』一書中作者柴興聲稱巴特農神殿建築正面的高度(屋頂三角面的頂端到基座底的高度)與支柱高度之比恰是黃金比例。

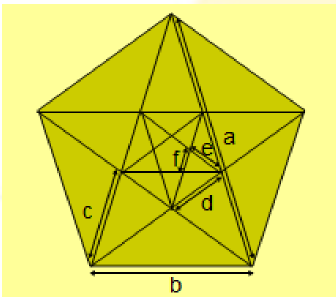
圖二巴特農神殿

藝術作品中與黃金比例有關的，尚有著名的『米羅的維納斯』雕像，維納斯的身高與肚臍高度之比，就接近黃金比例 Φ。以及達文西的『維特魯威人』，圖中人物手臂伸開和身體長度相同；伸展四肢時身體外接一個圓，身高除以肚臍高度也是黃金比例。見圖三



圖三維特魯威人

幾何圖形中的五角星形和正五邊形的關係密切，把五邊形的頂點以對角線相互連接就能得到五角星形。這些對角線又在中心形成一個小五邊形，小五邊形的對角線又形成一個更小的五角星形……。圖四中 a,b,c,d,e,f 之間的比都是黃金比例 Φ



圖四五角星形

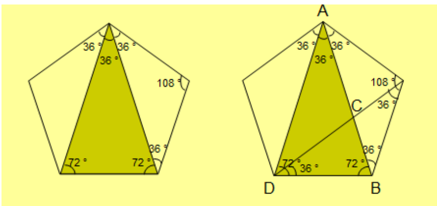
下圖中的 36-72-72 三角形稱為黃金三角形，其斜邊和底之比為 Φ。兩側的兩個三角形，其短邊和長底之比為 1/ Φ，稱為黃金磬折形，可以被分割成更小的黃金三角形及黃金磬折形。正五邊形的每一個內角 = 108°，如圖中的 ΔABD 與

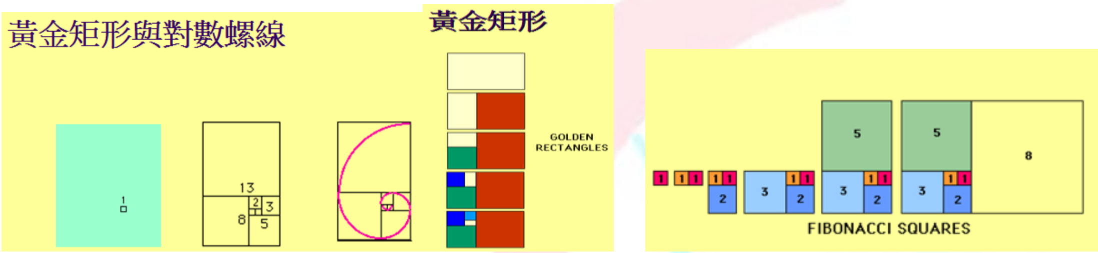
ΔDCB 為相似三角形

$\Rightarrow$ AB/DB = CD/CB

AC = CD = DB

$\Rightarrow$ AB/AC = AC/CB = Φ



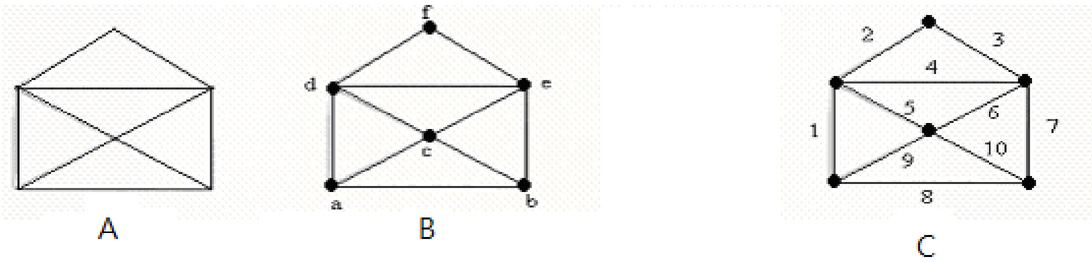


圖五黃金矩形與對數螺線

「一筆畫」問題

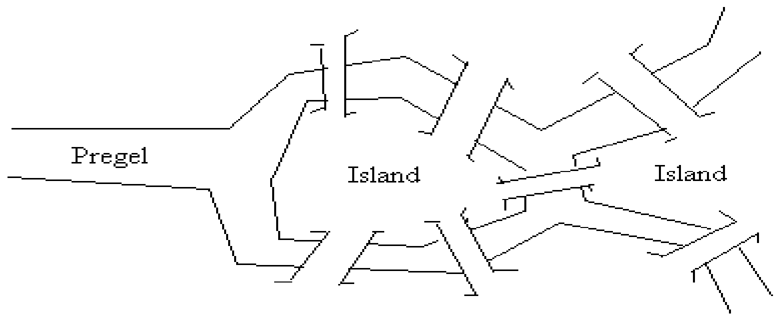
(見徐力行(2003)p.14)-指每一條線段只能描繪一次，不得重複。當筆尖一旦接觸到紙面時，可以直到全部畫完才離開紙面，相同的線段不會出現二次。

設有圖形如圖六所示，問此圖能否「一筆畫」?



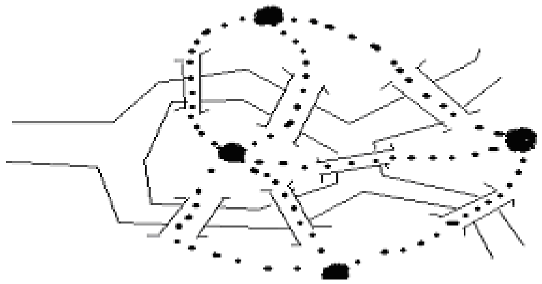
圖六 一筆畫

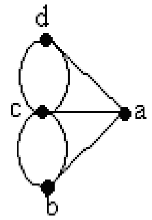
方法如下，將圖六-A 中線段交點的位置編上英文字母後，見圖六-B，並提供一組答案，如圖六-C 所示，請同學試著練習其他解法，並記錄起點與終點位置，在不同的答案中是否有某特殊現象，有何特別之處。如起點或終點以外的任何一點，其出入經過次數一定是偶數。此概念是由數學大師歐拉提出的。另一著名例子，七橋問題，起因於瀕臨波羅的海一座美麗古城-哥尼斯堡(Kö nigsberg)被 Pregel 河貫穿全城，Pregel 河有二條支流，於是人們建造了七座橋，見圖七。



圖七 七橋問題

城中居民常在飯後散步，卻發現無論怎麼走，都無法將每座橋恰好走過一遍並回到原出發點，最初許多人認為這是一件容易的事，誰都樂意去試試看，但嘗試之後發現不得其解，於是有人便跑去請教數學大師歐拉，歐拉思考後發現此一問題相當於問「起點與終點相同的一筆畫」問題，見圖六 A 及圖六 Bb，因線段的交點皆是奇數且超過 2 個以上，故無法將每座橋恰好走過一遍並回到原出發點，後來為紀念大師歐拉稱「歐拉圖形」。



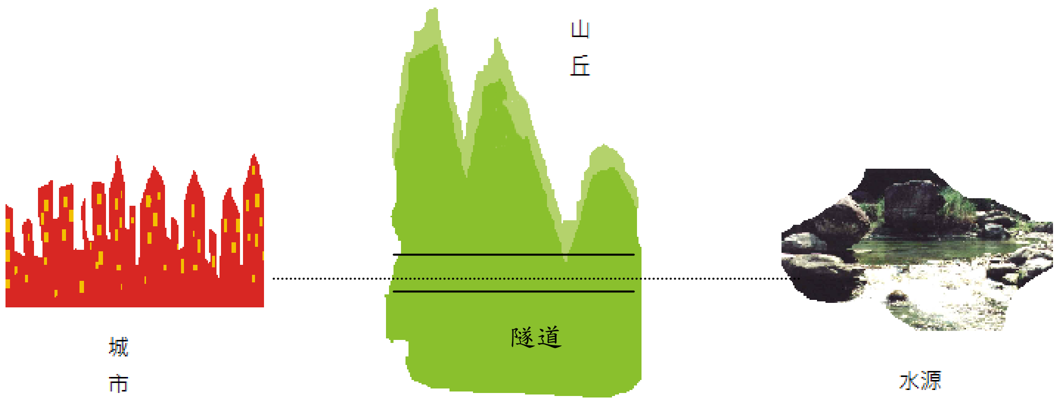


圖八 a 虛線標示路徑　　　　　圖八 b 線段表連接兩島間的橋樑

當圖不能一筆畫時，是否問題就此打住了，事實上對於好奇的學生，可能會思考那應該最少幾筆方可達成?而這就是數學想要學生換角度思考的用意，瞭解後對於問題的想法及解法，試著用不同的方式去處理問題，而不會輕言放棄。而這些內容卻是「離散數學」的重要課題，而離散數學則是資工系必修科目，期望學生能從中激發想像空間，進而踏進計算機圖形理論的殿堂。此外，一筆劃與走捷徑相似，對現今高油價時代如何有效運輸提高效率與節能相當重要，並與當代議題做結合。

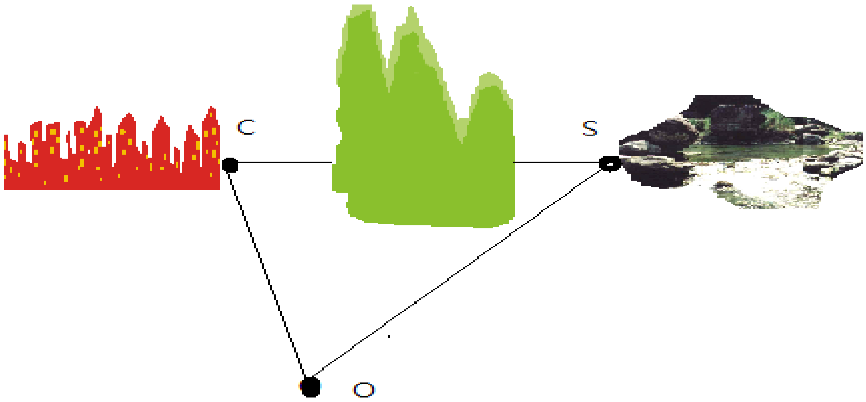
幾何的發源

埃及尼羅河每年氾濫一次,河旁肥沃的田園經過河水的蹂躪，田界頓失，田地主權之爭紛起。因此，農民為解決地權的爭議需要，就發明一些簡單的幾何圖形與測量方法。古埃及幾何的輝煌一直到現在還是有跡可循—「金字塔」即是一例。此外，天文學家更測量出千里之外地球到太陽的距離或一些恆星之間的距離。遠的不說，早在古希臘時代，某城鎮因人口快速增加供水吃緊，為解決水資源的問題，考慮將附近的水源穿越山脈輸導進來。但因高大山丘的阻隔，依當時的技術，除了開鑿隧道涵洞別無它法。見下圖四，當時就是利用正弦定理解決。(見水木耳譯(2001)p.1)。



圖九

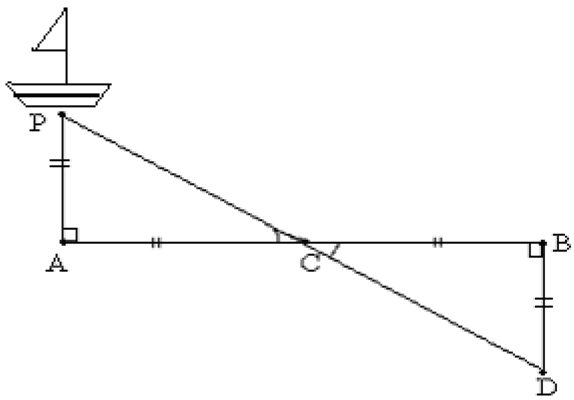
不能直接相連的，只好用間接的方法連起來。令Ｏ點為觀測點，可以同時看到Ｃ及Ｓ，連接ＯＣ及ＯＳ，並將可測得的角及長度代入即可求得。作法如下



全等三角形及相似三角形 (見王幼軍、金之明(1990)p.5)

全等三角形-指兩個完全相同的三角形

在國中數學的幾何單元，曾介紹全等三角形的定義，相信學生對全等三角形應該不陌生。據說，數學之父泰勒斯(Thales)應用全等的概念，計算不可到達物體的距離。例： 求岸上一點到海中一艘船的距離，方法如下(見圖十)，設 A 是觀察點，船在 A 的正前方 P 的位置，由點 A 在岸上做 AP 的垂線，在所作垂線上任意取一點 B。再作線段 AB 的中點 C，觀察者由 B 點沿著垂直線段 AB 的方向走，一路邊走邊看，直到 P、C 和觀察者成一條直線時停止，令 D 表示觀察者的位置，利用測量岸上線段 BD 的長度，即可求得線段 AP 的距離。



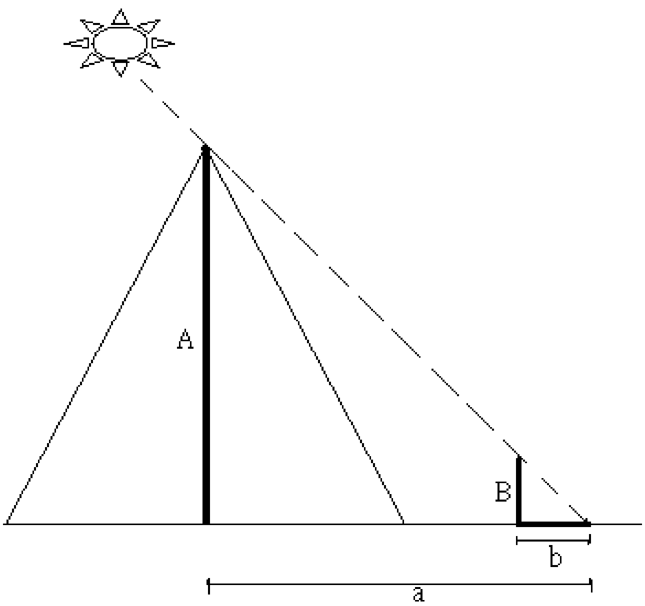
圖十

理由是，點 C 是線段 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{AC}=\overline{BC}$，另外 $\angle A=\angle B=90^0$，

$\angle ACP=\angle BCD$ (對頂角相等)，故 $\Delta APC\cong\Delta BDC$。因此，

$\overline{BD} = \overline{AP}$ 。

相似三角形，可適用的範疇更廣，在數學中流傳最廣的故事就是，泰勒斯到埃及旅行時，利用相似三角形原理-兩相似三角形相對應的邊長成比例，解開埃及最大金字塔的高度問題。當時，大師苦思許久仍不得其解，此時，恰有一對母女路過，因日照產生彼此大小不一的影子，而母女的高度恰與影子長短成比例關係， 泰勒斯想到可利用當木棍的影子長度和木棍本身高度相同時，金字塔影子的長度就應該是金字塔的高度，見圖 4-4。這說明了知識的取得並非只侷限在書本上，對於生活周遭事物的關心，可能會有意想不到的結果，這或許正是你、我突破瓶頸的關鍵，但唯一不變的求學態度就是費心思考，不輕言放棄的精神。同學或許會問萬一沒有陽光或是湖泊無法用影子求長度時，該怎麼辦?這是個好問題，為日後三角測量的發展開啟另一扇門。

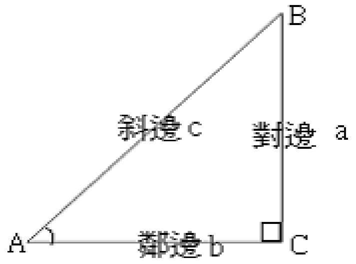


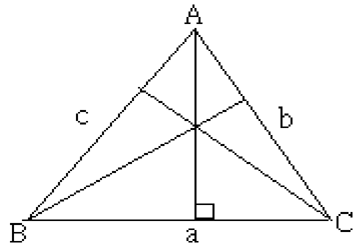
圖十一金字塔與棍子的影子

三角測量-利用三角函數測量未知的邊長及面積

三角函數最重要的兩個是正弦函數與餘弦函數。在直角三角形中，分別表對邊長、鄰邊長與斜邊長的比值，亦即正弦函數：$\sin\angle A = \dfrac{\text{對邊長}}{\text{斜邊長}} = \dfrac{a}{c}$ ，或 $(\sin\angle A)\times\text{斜邊長} = \text{對邊長}$，餘弦函數： $\cos\angle A = \dfrac{\text{鄰邊長}}{\text{斜邊長}} = \dfrac{a}{c}$，見圖 4-5a。

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin\angle A} = \dfrac{b}{\sin\angle B} = \dfrac{c}{\sin\angle C}$ 。

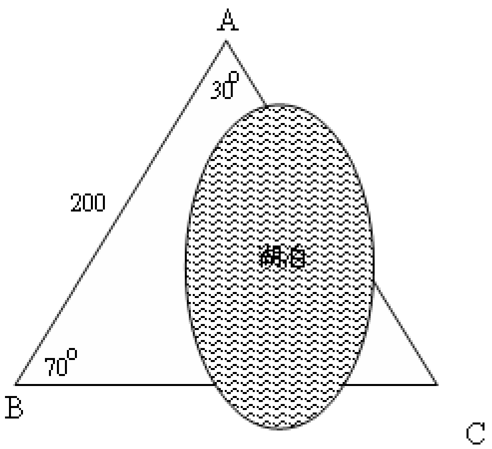




圖十二 a 直角三角形邊長關係　　圖十二 b 任意三角形邊長關係

現今，當如下圖所示，已知 $\overline{AB}=200$ 公尺，$\angle A=30^0$，$\angle B=70^0$，而 $\overline{BC}$ 中間正好有一湖泊，無法直接測量 $\overline{BC}$ 的長度，請問你要如何求得 $\overline{BC}$ 之長?見圖 4-6。

(已知 $\dfrac{\sin 30^0}{\sin 80^0}=0.5077$，正弦定律：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$)，



圖十三

利用三角形的內角和為 180^0，以及正弦定律，立即可得

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^0}=\frac{200}{\sin(180^0-30^0-70^0)},$$

所以

$$\overline{BC}=200\cdot\frac{\sin 30^0}{\sin 80^0}=200\times 0.5077=101.54 \text{ 公尺。}$$

中國剩餘定理-韓信點兵(或鬼谷算題)

可追溯至「孫子算經」中，或稱「孫子定理」，經流傳於民間變成有名的故事，其中又以「韓信點兵」的問題最常拿來當例子說明，後來更被西方數學家稱為「中國剩餘定理」。

今有一物，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問此物為何?事實上符合的數不只一個，例 23 即是其中之一，理由如下：

$$23\div3=7\ldots2，\quad 23\div5=4\ldots3，\quad 23\div7=3\ldots2$$

接著在給學生 128，請同學驗證是否符合此條件，若正確接著問同學能否找到下一個，這時「最小公倍數」的觀念及用途就可有效的連結。

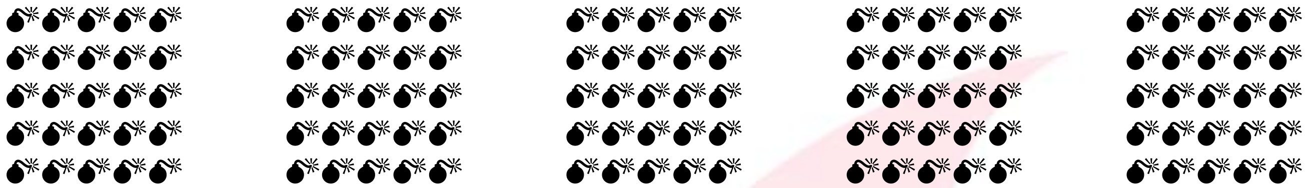
$$23+[3，5，7]=23+105=128$$

其中[3，5，7]代表數學中最小公倍數的記號，相關後續發展可請同學思考符合此條件的最大的三位數是多少?或是四位數中最小是多少等不同問題。另外，可提供趣味題目，如某天，俊男與美女兩人在圖書館相遇，假若俊男固定每五天就去一次圖書館，他第一次去是在七月的第一個星期一， 第二次去是在七月的同一星期的星期六；而美女則固定每四天就去一次圖書館，她第一次去是在七月的第一個星期二 第二次去是在七月的同一星期的星期六；七月的 31 天中，只有某一天兩人都去圖書館，他們就是在這一天相遇。試問這一天是七月幾日?答案為七月十七日(見許介彥(2001)p.110)。理由為何?請同學試著找尋答案。其應用尚包括：社團聚會時間，水果分籃，企劃小組進行人數分組安排。

學習單

<u>爆炸彈遊戲</u>

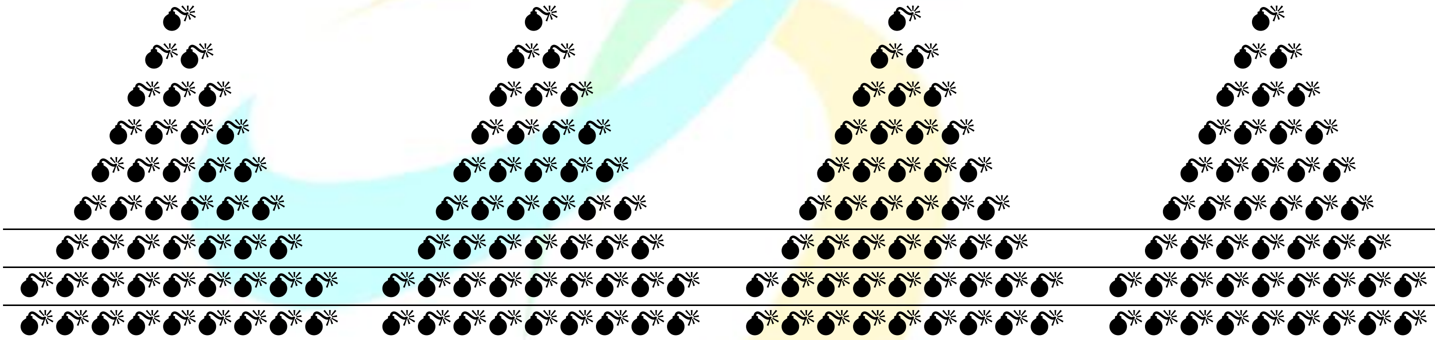
1. 25 枚炸彈兩人輪流引爆，一次最少爆 1 枚，最多爆 3 枚。誰引爆最後一枚炸彈誰就輸了。



先手： 勝者：				

必勝訣竅：

2.45 枚炸彈兩人輪流引爆，一次最少爆 1 枚，最多爆 3 枚。誰引爆最後一枚炸彈誰就輸了。



3.試找出必勝訣竅。另請設計一套玩法。

學習單

一、一般相片的尺寸為 3×5 、 4×6 、 5×7 、 6×8 ...等等，哪一種長寬比最接近黃金比例？你覺得黃金比例最美嗎？

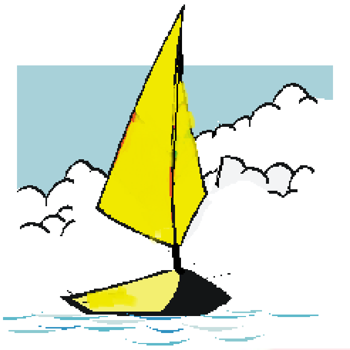
二、算算你的身材是不是黃金比例？(身高/肚臍到腳底長)

對今天課程的心得、感想

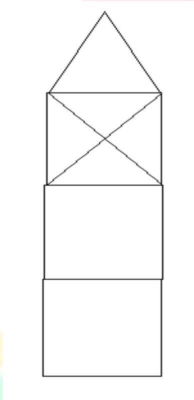
學習單

一筆畫問題-

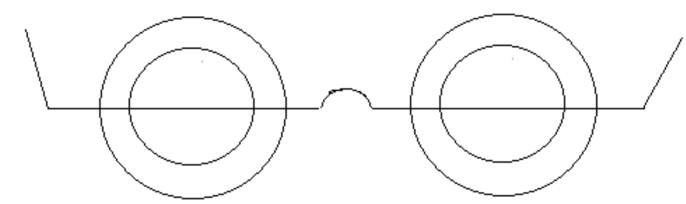
下面的圖，可以只用一筆就畫完。請試試看，要怎樣才能一筆畫到底。



帆船輪廓



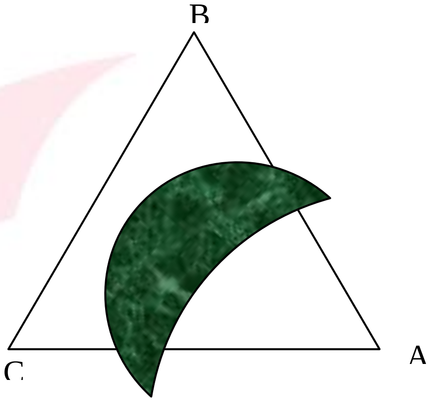
塔造型



眼鏡圖案

學習單

1. 如下圖所示,已知 $\overline{BC}=100$ 公尺, $\angle B=30^0$, $\angle C=70^0$,而 $\overline{AC}$ 中間正好有一湖泊-月湖,無法直接測量 $\overline{AC}$ 的長度,請問你要如何求得 $\overline{AC}$ 之長?



2. 俊男在山麓測得山頂之仰角為 45^0 ，由此處上山有一直線斜坡路,與地面成斜度 15^0 ，此人沿此坡 200 公尺又測得山頂之仰角為 60^0 ，如下圖所示，求此山高。 (提示：利用正弦定理及 $\frac{\sin 45^0}{\sin 15^0}=2.7321$)