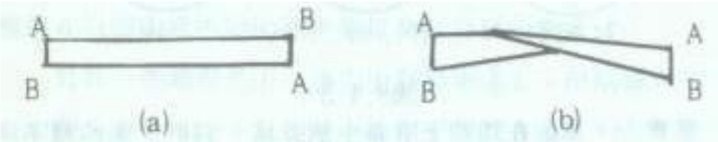
數學與科學

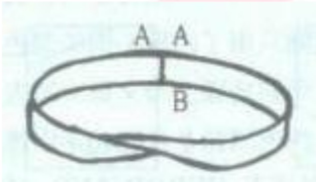
資料來源：神秘有趣的數學，孫文先編譯

「麥比亞斯環」(MOEBIUS BAND)是由麥比亞斯發明的。這環的制作如下:取一張長約為 30 公分，寬約為 5 公分的紙條，如圖一(a)，將它扭轉半圈(即 180 度) ，如圖一(b)。



圖一

將圖一(b)的紙條按 A、B 處分別黏上便成圖二的形狀。



圖二

這就是我們所需要的麥比亞斯環了。這環有許多十分特別而有趣的性質。

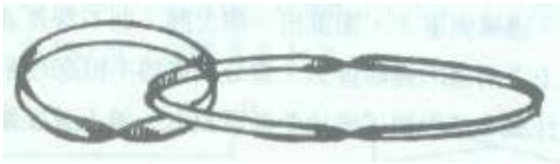
首先觀察這環有多少邊?首先用一鉛筆在接近環下面邊緣處(約離邊處 0.5 公分)向右一直畫去，直至回到原來的起點。我們會發現，鉛筆畫下的線不但出現在接近下面的邊緣，而且亦出現在接近上面的邊緣。亦即，我們能一筆過沿著環的(上下兩)邊緣處畫去，能畫出一個大圈，不像普通的紙環沿上下兩邊邊緣畫時，會分別畫得不相連的兩圓圈。這說明了麥比亞斯環只有一邊!並非像普通的紙環有兩邊。這正是麥比亞斯環最大的特點—只有一面及只有一邊。

麥比亞斯環還有許多有趣性質。如果在普通的紙環中央處用剪刀橫剪一周，便將原來的環剪斷為兩個較窄的紙環，其寬度為原來的一半，而長度保持不變。但如果以同樣的方法剪開一個麥比亞斯環，如圖三，我們會發現完全不同了。

圖三

雖然整個環被剪了一周，但不能將原環剪開為兩個，而是剪成一個更大的紙環，是一個扭了兩轉的環!更有趣的是，如果我們另取一個麥比亞斯環，並在環寬度

三分之一(即離邊緣約 1.5 公分)處橫剪一周(注意下剪時要小心，必須在環的三分之一而不是二分之一)。剪後的結果不再是一個大環而是兩個相互扣著的環!在這兩環中，一個仍是只有一面一邊的麥比亞斯環，其長度仍和原來的環一樣(當然寬度窄了)，而另一個卻變成普通的兩面兩邊的環，但長度是原來的一倍!(如圖四)



圖四

練習：用另一個麥比亞斯環，在其寬度為四分之一處(約離邊緣 1 公分)橫剪一周，看看其結果和前面所提的有什麼不同?

碎形

幾何學創始者曼德布洛特（Benoit Mandelbrot）發展出一套看待地自然的嶄新方法----碎形，**什麼是碎形：**

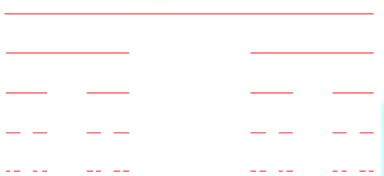
碎形具有自我相似性

碎形具有無關尺度性

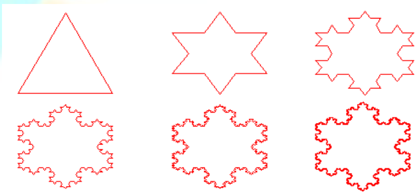
碎形具有分數維度

碎形代表有限區域的無限結構

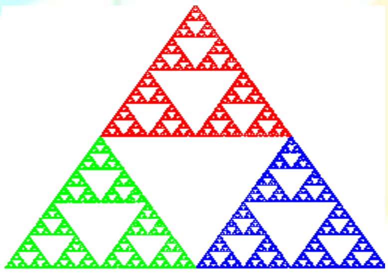
碎形是非線性動力過程造成的結果



康托集 Cantor Set



寇赫曲線 Koch Snowflake



余賓斯基三角形 Sierpinski Triangle

機率

以香港六合彩的中獎機會為例說明。

例：六合彩的獎項規則如下：

頭獎：須從 47 個號碼中選中 6 個與開彩出來的相同號碼。二獎則須中 5 個號碼

和 1 個特別號碼。若只中 5 個號碼，便會得三獎。基於這些中獎的條件，依機率的乘法定律（multiplication law）計算可知

中頭獎的機率

$$\frac{6}{47}\times\frac{5}{46}\times\frac{4}{45}\times\frac{3}{44}\times\frac{2}{43}\times\frac{1}{42}\approx 9\times 10^{-8}$$

發生的機會，相當於想要連續 24 次擲得硬幣的同一面(可正面或背面)，

中二獎的機率

$$\frac{6}{47}\times\frac{5}{46}\times\frac{4}{45}\times\frac{3}{44}\times\frac{2}{43}\times\underline{6\times\frac{1}{42}}\approx 6\times 10^{-7}$$

中三獎的機率

$$(\frac{6}{47}\times\frac{5}{46}\times\frac{4}{45}\times\frac{3}{44}\times\frac{2}{43})\times\underline{6\times\frac{40}{42}}\approx 2\times 10^{-5}$$

結論：可見六合彩的中獎機會在某種程度上可說是近乎零！賭法還是不要的好，做做發大財的白日夢即可，或小買試手氣即可，一旦沈迷其中可是會傾家蕩產的。

討論議題：同月同日生是難得的緣分嗎？生活的數學 p146

歷史典故－桃園三結義

當年劉備、關羽、張飛三人義結金蘭，大家說好雖不能同年同月同日生，但願同年同月同日死！ 在國外，有位范布雷先生就曾在荷蘭一份暢銷報刊登廣告，登報尋找與他同在民國三二年八月十五日出生的人，並相約八月十五日一起慶祝生日。因此，

今天討論的主題：同月同日生是難得的緣分嗎？

「慶生」活動相信每人或多或少都有參加的經驗。尤其在機關團體或親朋好友更司空見慣，藉由舉辦「慶生」活動，為平淡無奇的生活中注入些歡樂和熱鬧的氣氛。想想看，若班上有 40 位同學，碰上同月同日生，這樣的「巧合」機會是否真的很難得呢?

活動設計一：調查上課學生出生的月、日。

【解說】

要解答這問題，不妨從反面思考－無同月同日生？

在此只考慮非閏年(365 天)的情況，並假設每人的生日為一獨立事件。令 40 位學生的生日全不相同的機率為， $pr(B^C)$ ，則

$$pr(B^C)=\frac{365\times364\times\ldots\times326}{365^{40}}$$ 。

故 40 人的班級，至少有兩人是同月同日生的機會， $pr(B)$，

$$pr(B)=1-pr(B^C)\approx0.89$$

以少子化的今日而言，班上同學若只有 23 人時，仍有 0.51 的機會碰到上述的「巧合」。由此可知，班上的同學出現同月同日生，應該不會令人太意外了！

例：小明是個愛好籃球的中學生，希望生日時能到美國觀看 NBA 球賽。他父親開出一個條件說：你需和我及你的母親輪流對局共三次。若你能連贏兩局，便同意你的要求。已知父親贏的機率為$\frac{3}{4}$，母親贏的機率為$\frac{1}{5}$，試問對手順序為①贏父母父的機會為何？②贏母父母的機會為何？結果何者贏的機會較大，理由為何？

提示分贏三局，贏二局

①贏三局：$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{80}$

贏前二局：$\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{12}{80}$

贏後二局：$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{12}{80}$

總和 $\frac{4}{80}+\frac{12}{80}+\frac{12}{80}=\frac{28}{80}$＝0.35

②贏三局：$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{100}$

贏前二局：

$\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{100}$

贏後二局：

$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{100}$

總和

$\frac{16}{100}+\frac{4}{100}+\frac{4}{100}=\frac{24}{100}$=0.24

結果父母父贏的機會較大，因第二局是最重要的。

例： 若想估計池塘的魚量，先將魚撈出並做記號並再放回池中，若已知撈出 1200 尾，隔一段時間再撈得 2000 尾，其中有 500 尾有記號，試問池塘的魚量約多少？

說明：設池塘有N尾， $\frac{N}{1200}=\frac{2000}{500}$，N＝4800

統計

統計騙人容易，不用統計騙人更容易，統計最重要的整理數據,因此首重數據從何而來?因此當看到數據報告時,第一個該問的問題應是：「這數字是如何取得？」。要用統計騙人很容易，但是不用統計，騙人更容易。莫斯提勒部分事實三人市虎的故事。承認變異的存在：變異是無所不在。即便是同一個個體，當度量的次數增多，結果有可能會不一樣，更遑論存在不同個體之間的差異。所以統計結論並非絕對的，因此凱因斯曾說：當事實改變時，我就改變主意。統計學是一門應用廣泛的學科，目前被廣泛應用在生物、醫學、人口、商業．．．等，無一不是利用到統計的分析方法。本單元目的是教大家如何解讀資訊而不會受騙。另外，資料閱讀性一圖、二表、三文字，可見利用圖形做報告相當常見。底下，先介紹統計圖可能的錯誤。

統計圖你用對了嗎　？如何檢驗統計圖的誤用？

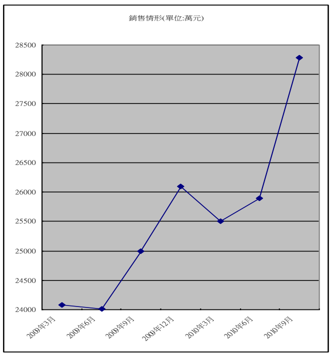
統計圖表是幫助我們理解大量數據和資料的重要工具。日常生活中，常見媒體報章雜誌引用統計圖表，但往往由於繪製者（有意或無意）的疏忽，統計圖易產生視覺上的誤解。

【折線圖】

案例一：某中小企業股份有限公司近二年的營業銷售額季報表，如下表。業務人員簡報時以折線圖示，見圖(a)。主管聽取簡報時，見圖時可能誤以為公司銷售額在 98 年 3 月的 25924（萬元）「急升」至 99 年 6 月的 28281（萬元）。但事實的真相:後者只是前者的 1.2 倍(即:28281/25924 約 1.2);由於該圖的縱軸以 24000（萬元）為起點，圖形所顯示出來的升幅卻高達 2.2 倍（將 28281 與 24000 的差額除以 25924 與 24000 的差額，4281/1924 約 2.2）。見圖(a)。

銷售情形(單位:萬元)

	24079
98 年 6 月	24010
98 年 9 月	25000
98 年 12 月	26100
99 年 3 月	25500
99 年 6 月	25900
99 年 9 月	28281



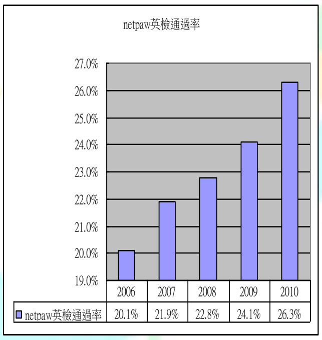
圖(a)

【長條圖】

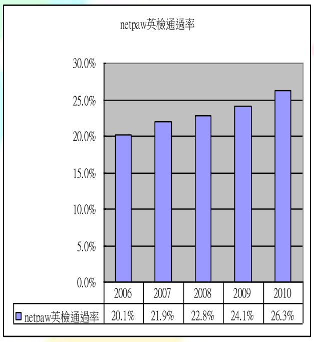
案例二：某技術學院調查最近 5 年入學新生 netpaw 英檢通過率，結果如下：

近 5 年新生 netpaw 英檢通過率

年	netpaw 英檢通過率
2006	20.1%
2007	21.9%
2008	22.8%
2009	24.1%
2010	26.3%



圖(b-1)



圖(b-2)

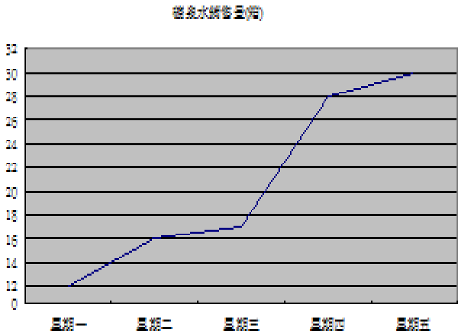
依相同的數據，但採不同的坐標軸當起始點與間距，繪製長條圖，見圖(b-1)、圖(b-2)。比較圖(b-1)、圖(b-2)的差異，可發現圖(b-1)有誤導的現象。圖(b-1)的 2006 年與 2007 年入學新生英檢的通過率，容易產生視覺上的錯誤，誤認成長的幅度超過 2 倍。

【縱橫軸皆以「零」作為起始點，是否就不會發生升幅比例上的誤差？】

案例三：某知名品牌礦泉水一週銷售情形，如下：

單位:箱

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
12	16	17	28	30



圖(c)

圖(c)，若仔細觀察該圖的縱軸，不難發現比例上的錯誤－並非相等間距！

結論：

總之，為避免掉入有心或無意的人士統計圖誤導的陷阱，除需留意坐標軸的比例外，更應以實際的數據去檢驗視覺上的比例，查看兩者變化是否真的相符！其他統計圖的用法可參閱別讓統計圖表唬弄你(葉偉文　譯)。

——小心駛得萬年船

變異量數

對於數據變異性即離中趨勢進行量測的一組統計量，稱**變異量數**，常用的有：全距、四分差、變異數及標準差。

單元一：全距（Range ，簡寫為 R）資料中最大值－最小值)，意義為資料數值的變動範圍，優點是一種最簡單、粗略的統計量數，缺點是易受極端值影響。

（A）未分組：

例：一根熱狗有多少卡路里？以下為 10 個不同品牌的卡路里含量:

173,191,182,190,172,147,146,139,175,136

解:最大值:191,最小值:136,全距=191-136=55

(B)分組：全距=最大組的上限-最小組的下限

例:南榮科技大學新生英文分級測驗成績，分組整理如下表所示，試求其全距

英文分級成績	次數	備註
44.5~59.5	6	最小值
59.5~74.5	20	
74.5~89.5	12	最大組

解:最大組上限=89.5　　最小組的下限=44.5　　全距=89.5-44.5=45

單元二:四分差(將數值由小到大排序後,分四等分,四分差(Q)=[Q3(第三四分位數)-Q1(第一四分位數)]/2,四分差優點不受極端數值影響,只考慮中間的 50%

例:如上例 173,191,182,190,172,147,146,139,175,136,由小到大排序後為

136,139,146,147,172,173,175,182,190 ,191

位置:資料數=10 筆,

Q1 的位置=1/4 (10+1)=2.75，位置介於 2 與 3 之間,採內插法

Q1=139+0.75(146-139)=144.25

Q3 的位置=3/4 (10+1)=8.25,位置介於 8 與 9 之間,採內插法

Q3=182+0.25(190-182)=184

Q=(184-144.25)/2=39.75/2=19.875

變異數與標準差

變異數:與(平均值差)的平方

樣本變異數:設有 n 個觀察值,分別為 $x_1, x_2, \ldots, x_n$,平均值為 $\bar{x}$,則

樣本變異數 $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$,標準差=$\sigma = \sqrt{S^2}$

例:王建民在大聯盟最近 5 場的三振次數為:8,9,10,6,7,求其平均每場三振次數,變異數,及標準差．

解：先求平均數，$n=5$，平均數$=\dfrac{8+9+10+6+7}{5}=\dfrac{40}{5}=8$

變異數求法

- 每項減去平均數=$8-8, 9-8, 10-8, 6-8, 7-8$
- 結果=$0,1,2,-2,-1$
- 平方的結果=$0,1,4,4,1$
- 變異數=$\dfrac{0+1+4+4+1}{5-1}=\dfrac{10}{4}=2.5$
- 標準差=$\sqrt{2.5}=1.58$

例:小胖正在減肥計劃每月減重如下為:0.8,0.9,1,0.6,0.7,求其平均每月減肥幾公斤,變異數,及標準差．

變異係數(coefficient variation):若性質不相同的兩組做比較時,利用一種相對的測度值來做比較的標準,值為 C.V.= $\dfrac{s}{\bar{x}} \times 100\% = \dfrac{\text{標準差}}{\text{平均數}} \times 100\%$

例:設雞群的重量平均值=4 公斤，標準差=1.2 公斤

設豬群的重量平均值=100 公斤，標準差=10 公斤,試問何者重量的變異程度較大

解:

雞群的變異係數=$\dfrac{1.2}{4} \times 100\% = 30\%$

豬群的變異係數=$\dfrac{10}{100} \times 100\% = 10\%$

例：甲乙兩班英文大會考成績如下：

甲：58,59,60,61,62

乙:40,50,60,70,80

求各班的平均數，變異數,標準差及變異係數,試問那班程度較好?

解:甲的平均數=60，變異數=2,標準差=$\sqrt{2} \approx 1.4$，變異係數 C.V.=

$$\frac{1.4}{60}\times 100\% = 2.3\%$$

乙的平均數=60, 變異數=200,標準差=$\sqrt{200}\approx 14.1$, 變異係數 C.V.=

$$\frac{14.1}{60}\times 100\% = 23\%$$

以 60 分代表甲班的平均程度比以 60 分代表乙班的平均程度,要來得的好.

例:甲乙兩班英文大會考成績如下：

甲：57,59,61,63,65

乙:41,51,61,71,81

求各班的平均數, 變異數,標準差及變異係數,試問那班程度較好?

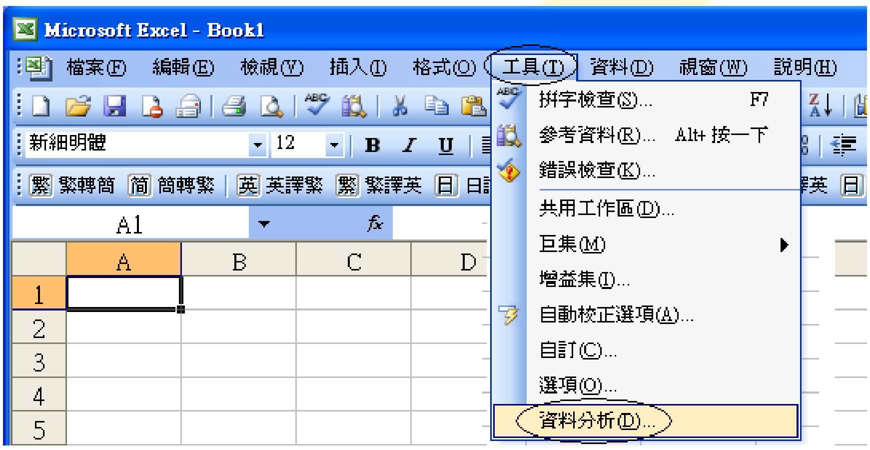
例：標準分數(standard Score)，是將原來的數據轉換成標準值的一種方法，最常使用的是 Z 分數(Z-score)= $\dfrac{x-u}{\sigma}$,其中

x：原始數值, u：平均數，σ：標準差。假設某項考試，甲、乙二人參加應試。甲選考「機率的樂趣」，分數 88 分，該科考試之平均分數為 80 分，標準差 10 分，乙選考「環境倫理」，分數 90 分，該科考試之平均分數為 85 分，標準差 5 分。若以成績較優者錄取一人，則此二人之成績何者較優?

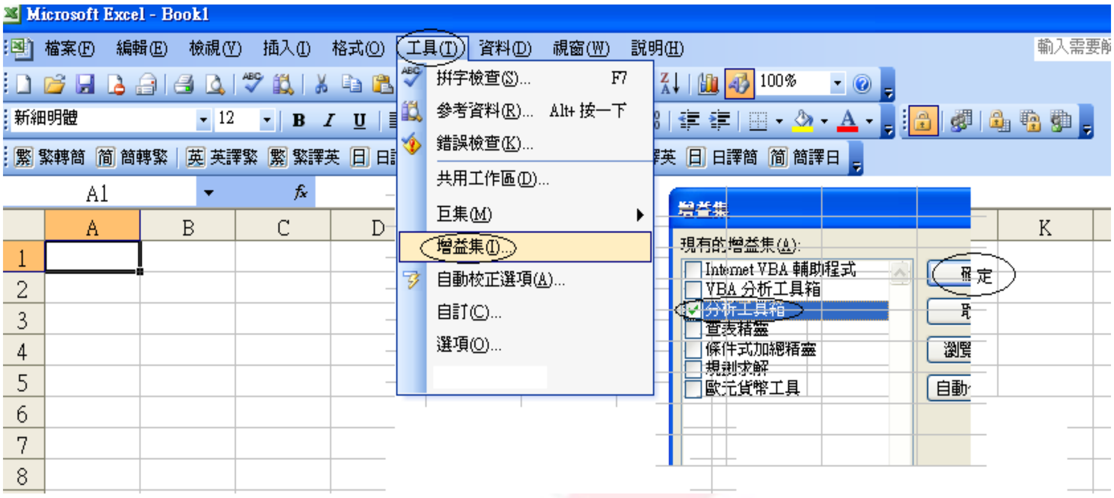
(說明: 機率的樂趣: $\dfrac{88-80}{10}=0.8$, 環境倫理 $\dfrac{90-85}{5}=1$,乙的成績較優)

如何應用”**資料分析**”

點選功能表列”工具”的”資料分析”,如下圖一,(如果沒有時,請選”工具”的”增益集”選取”分析工具箱”,就可在”工具”功能中產生”資料分析”功能選項如下圖二



圖一



圖二：如何在"工具"產生"資料分析"功能

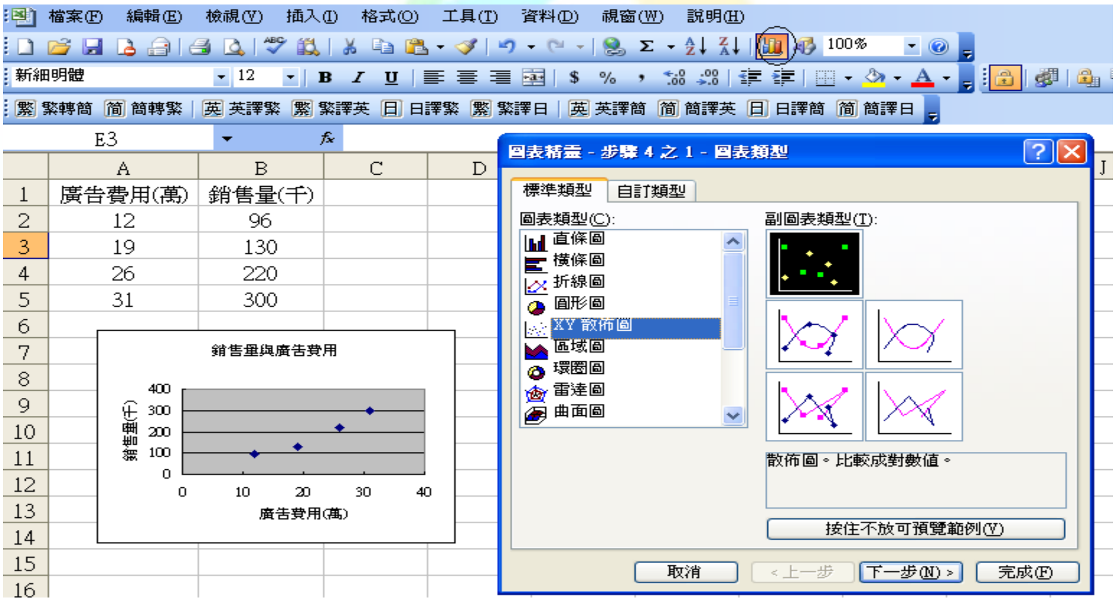
單元：線性迴歸的應用

例：銷售量與廣告費用的關係：如下表

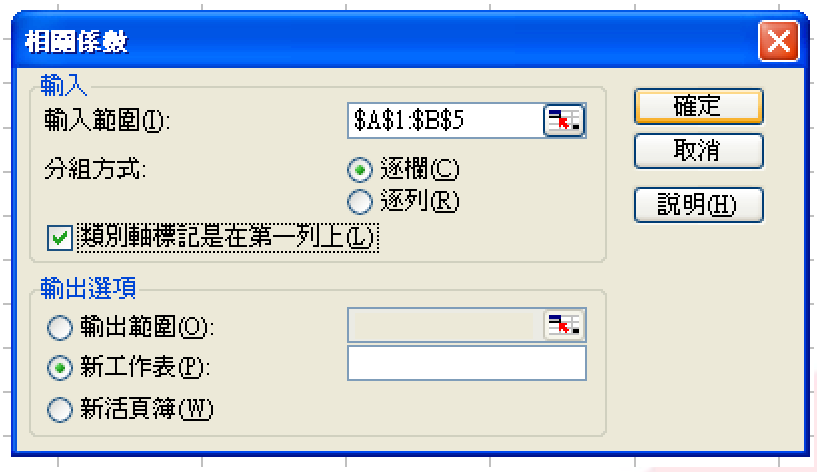
廣告費用(萬)	銷售量(千)
12	96
19	130
26	220
31	300

Q：如何分析資料

● 作圖，利用 excel 功能"插入"的"圖表"或是如下圖三，即可產生所需的圖



由上圖可知，資料約在一直線的附近，表具有直線關係，其相關係數的求法為選取"工具"的"資料分析"的"相關係數"，即可快速求得，見下圖三



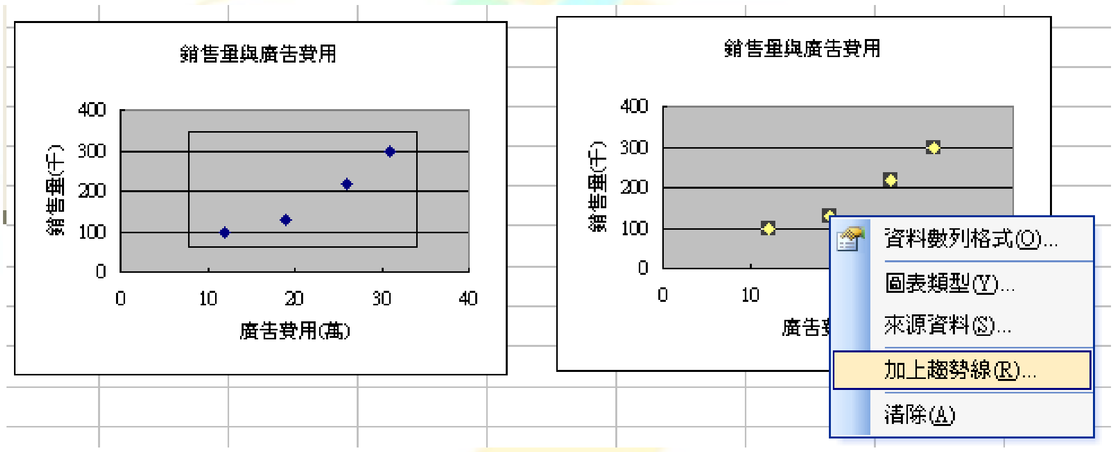
相關係數矩陣

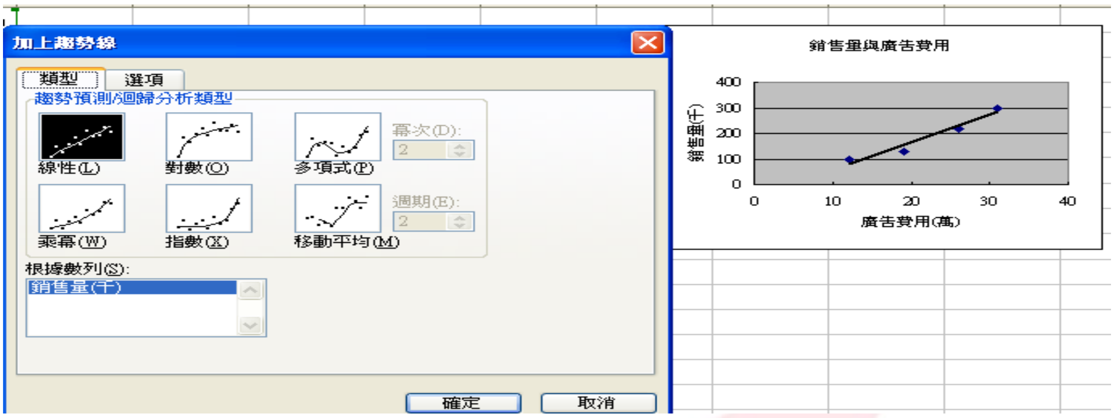
	廣告費用(萬)	銷售量(千)
廣告費用(萬)	1	？
銷售量(千)	0.97513683	1

問題：表格中的？，其值應為何？

增加迴歸線（或趨勢線）的方法：

在圖形的“**資料點**”按**滑鼠右鍵**(見下圖左),會出現下圖右的結果,再選取”加**入趨勢線**”,在選取”**線性**”即可,

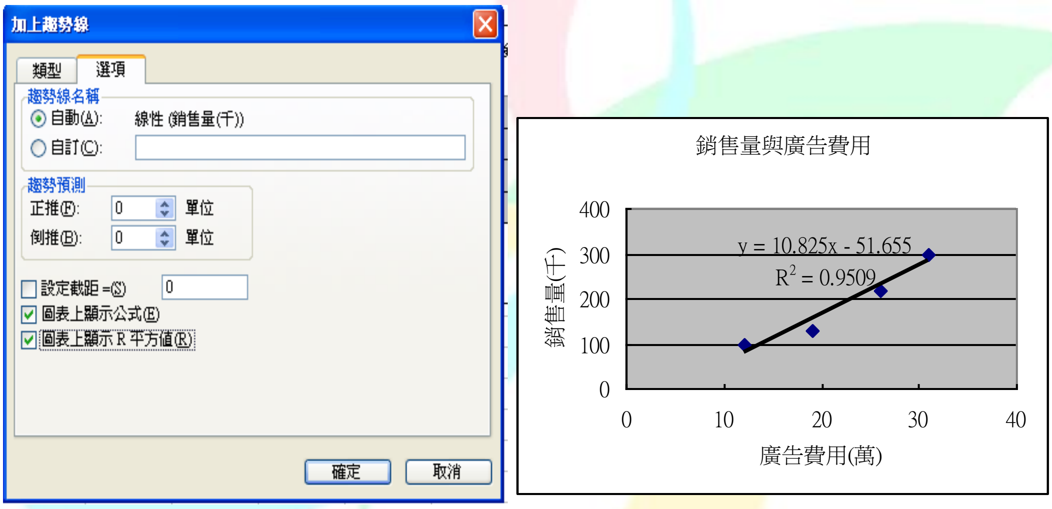




線性迴歸模式

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

如何利用最小平方法,求得參數(即未知數 β_0, β_1)找出迴歸線



結語:平均數常會受極端值影響。

討論議題：

討論議題:平均值是否是很好的集中度量單位?
新聞一則: 2011 年 1 月 5 日立委在立法院財政委員會質詢時,針對經建會日前發布資料指國人平均月收入有四萬四千元，質疑這數字跟國人觀感差距太大，要求主計處、經建會、農委會、經濟部官員舉手發誓，在馬總統任內要做到國人月收入四萬四千元，結果官員無人敢舉手發誓。看到官員不敢承諾，就不要發表這種數字。經建會發布資料說經濟好轉，國民平均月收入有四萬四千元，發布之後網友批評「四萬四千元在哪？大部分人都沒有；主計處另說有 360 萬人月收入在三萬以下，134 萬人月收入兩萬五不到，顯示貧富差距拉大，大部分民眾仍苦哈哈。月收入三萬元在開發中國家是「後段班」，經建會發表四萬四的數字是「虛擬的奢華」，與國人觀感差距太大。在馬總統任內做到逾半國人月收入有四萬四，自己發布的數字有無可能做到？經建會副主委答詢表示，四萬四是平均值，他們會努力。
資料來源:http://www.atlaspost.com/landmark-7515542.htm#ixzz1C9f4XmvY

參考資料

羅浩源，生活的數學，九章出版社

學習單

1. 你知道白努力試驗，可以用來預測池塘魚的數量嗎?想一想如何辦到。

2. 已知某韻律體操比賽 7 名選手成績為：7，9，8，8，10，6，8 (分) 。①請將資料由小到大排序②此樣本之平均數、中位數及眾數。

3. 例:某基金最近 5 日收盤價為:31.2,34.5,39.1,32.1,30.5,求全距。

4. 訪問 30 名南榮四技部學生每天上網時數(分)，結果如下：

52	55	58	54	59	58	61	58	59	55
55	54	48	55	55	50	53	54	57	54
51	56	60	55	55	58	56	54	56	52

試回答下列問題：①此樣本之平均數、中位數及眾數。

4 柏元的父親想要換部新車,想知道汽車重量對汽車用油量的影響。
令 x 表汽車重量(公斤);y 表每公升汽車在高速公路上的公里數,收集 10 部汽車資料如下:

x	210	240	230	210	220	180	200	260	190	270
y	11	9	10	10.5	10	12	11	8.5	11	8

試利用 Excel 軟體回答下列問題:

i. 請畫出 y 對 x 的散佈圖。
ii. 求 x,y 的相關係數,並解釋出相關程度為何?
iii. 求 y 對 x 的線性迴歸線,並將此線劃在散佈圖。
iv. 畫出殘差圖。
v. 模式解釋能力為何？分別估計 x=210 及 x=250 時,所對應的 y 值。